

Resumen Capítulo: Álgebra y Funciones

Expresiones Algebraicas

Una expresión algebraica combina números, variables y operaciones. Ejemplo: $7x^2 - 4xy + 3$.

Tipos:

- **Monomio:** Un término. Ejemplo: $5x^3$. Grado: suma de exponentes (3).
- **Polinomio:** Suma de monomios. Ejemplo: $3x^2 + 5x - 2$. Grado: mayor grado de sus términos (2).

Operaciones:

- **Suma/Resta:** Combina términos semejantes. Ejemplo: $(4x^2 + 2x) + (x^2 - 5x) = 5x^2 - 3x$.
- **Multipliación:** Aplica distributiva. Ejemplo: $(4x)(x - 1) = 4x^2 - 4x$.
- **División:**
 - **Monomios:** Divide coeficientes y resta exponentes. Ejemplo: $\frac{12x^4}{3x^2} = 4x^2$.
 - **Polinomios:** Usa división larga o factorización para simplificar.

Ejemplo de división de polinomios: Divide $\frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$.

- Factoriza numerador: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$.
- Factoriza denominador: $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.
- Simplifica: $\frac{(x-1)(x+2)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x+2)(x-3)}{x-2}$, para $x \neq 1, x \neq 2$.
- Resultado: $\frac{x^2 - x - 6}{x - 2}$.

Ejemplo de suma: Simplifica $(5x^2 - 3x + 4) - (2x^2 + x - 3)$.

- $(5x^2 - 2x^2) + (-3x - x) + (4 - (-3)) = 3x^2 - 4x + 7$.

Factorización

Descompone polinomios en factores. Métodos:

- **Factor común:** Extrae el factor común. Ejemplo: $15x^2 + 10x = 5x(3x + 2)$.
- **Diferencia de cuadrados:** $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Ejemplo: $25x^2 - 9 = (5x - 3)(5x + 3)$.
- **Trinomio cuadrado perfecto:** $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$. Ejemplo: $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$.
- **Trinomio forma $x^2 + bx + c$:** Busca factores de c que sumen b . Ejemplo: $x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5)$.

Ejemplo: Factoriza $4x^2 + 16x + 12$.

- Factor común: $4(x^2 + 4x + 3)$.
- Factoriza $x^2 + 4x + 3$: $(x + 1)(x + 3)$.
- Resultado: $4(x + 1)(x + 3)$.

Ecuaciones

Igualdad que se satisface para ciertos valores.

Ecuaciones lineales: Forma $ax + b = 0$. Solución: $x = -\frac{b}{a}$.

- Ejemplo: Resuelve $5x - 15 = 0$.

$$- 5x = 15 \Rightarrow x = 3.$$

Ecuaciones cuadráticas: Forma $ax^2 + bx + c = 0$. Soluciones:

- **Fórmula general:** $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

- **Factorización:** Si es factorizable.

Ejemplo: Resuelve $x^2 - 7x + 12 = 0$.

- Factoriza: $(x - 3)(x - 4) = 0$.
- Soluciones: $x = 3, x = 4$.

Sistemas de Ecuaciones

Conjunto de ecuaciones con las mismas variables.

Métodos:

- **Sustitución:** Despeja una variable y sustituye.
- **Igualación:** Despeja la misma variable e iguala.
- **Reducción:** Suma/resta ecuaciones para eliminar una variable.

Ejemplo: Resuelve:

$$4x + y = 10$$

$$2x - y = 2$$

- Suma ecuaciones: $(4x + y) + (2x - y) = 10 + 2 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = 2$.
- Sustituye $x = 2$ en $2x - y = 2$: $4 - y = 2 \Rightarrow y = 2$.
- Solución: $(x, y) = (2, 2)$.

Desigualdades e Inecuaciones

Una desigualdad compara expresiones usando $<$, $>$, $\leq$, $\geq$. Una inecuación es una desigualdad con variables.

Propiedades:

- Sumar/restar un número no cambia el sentido.
- Multiplicar/dividir por un número positivo no cambia el sentido.
- Multiplicar/dividir por un número negativo invierte el sentido.

Frases Típicas utilizadas en problemas de inecuaciones:

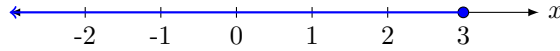
- A lo menos: $x \geq a$
- Como mínimo: $x \geq a$
- Cuando mucho: $x \leq a$
- Como máximo: $x \leq a$
- No alcanza: $x \leq a$
- Sobrepasa: $x \geq a$

- A lo más: $x \leq a$

Inecuaciones lineales: Forma $ax + b < c$. Resuelve como ecuación, manteniendo el signo.

- Ejemplo: Resuelve $3x - 4 \leq 5$.

- $3x \leq 9 \Rightarrow x \leq 3$.
- Solución: $x \in (-\infty, 3]$.
- **Gráfico:**



Inecuaciones cuadráticas: Forma $ax^2 + bx + c < 0$. Pasos:

- Encuentra raíces resolviendo $ax^2 + bx + c = 0$.
- Divide la recta numérica con las raíces.
- Evalúa intervalos.

Ejemplo: Resuelve $x^2 - 4x + 3 > 0$.

- Raíces: $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$.
- Intervalos: $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$, $(3, \infty)$.
- Prueba: En $x = 0$: $0 - 0 + 3 = 3 > 0$ (sí). En $x = 2$: $4 - 8 + 3 = -1 < 0$ (no). En $x = 4$: $16 - 16 + 3 = 3 > 0$ (sí).
- Solución: $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.
- **Gráfico:**

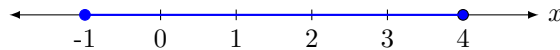


Sistemas de inecuaciones: Resuelve cada inecuación y encuentra la intersección.

- Ejemplo: Resuelve:

$$\begin{aligned} x + 3 &> 2 \\ 2x - 1 &\leq 7 \end{aligned}$$

- Primera: $x + 3 > 2 \Rightarrow x > -1$.
- Segunda: $2x - 1 \leq 7 \Rightarrow 2x \leq 8 \Rightarrow x \leq 4$.
- Solución: $x \in (-1, 4]$.
- **Gráfico:**



Ejemplo adicional 1 (inecuación cuadrática): Resuelve $x^2 - 6x + 8 \leq 0$.

- Raíces: $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 4$.
- Intervalos: $(-\infty, 2)$, $(2, 4)$, $(4, \infty)$.
- Prueba: En $x = 0$: $0 - 0 + 8 = 8 > 0$ (no). En $x = 3$: $9 - 18 + 8 = -1 \leq 0$ (sí). En $x = 5$: $25 - 30 + 8 = 3 > 0$ (no).
- Solución: $x \in [2, 4]$.
- **Gráfico:**

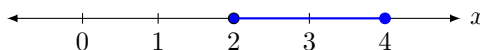


Ejemplo adicional 2 (sistema de inecuaciones con intersección): Resuelve:

$$4x - 3 \geq 5$$

$$x + 2 < 6$$

- Primera: $4x - 3 \geq 5 \Rightarrow 4x \geq 8 \Rightarrow x \geq 2$.
- Segunda: $x + 2 < 6 \Rightarrow x < 4$.
- Solución: $x \in [2, 4)$.
- **Gráfico:**



Proporcionalidad

Relación entre variables que varían de forma constante.

Proporcionalidad directa: $y = kx$, donde k es la constante de proporcionalidad.

- Si x aumenta, y aumenta proporcionalmente.
- Ejemplo: Si y es proporcional a x y $y = 15$ cuando $x = 3$, halla y cuando $x = 5$.

$$- k = \frac{y}{x} = \frac{15}{3} = 5.$$

$$- y = kx = 5 \cdot 5 = 25.$$

$$- \text{Respuesta: } y = 25.$$

Proporcionalidad inversa: $y = \frac{k}{x}$, donde k es la constante.

- Si x aumenta, y disminuye.
- Ejemplo: Si y es inversamente proporcional a x y $y = 8$ cuando $x = 2$, halla y cuando $x = 4$.

$$- k = xy = 8 \cdot 2 = 16.$$

$$- y = \frac{k}{x} = \frac{16}{4} = 4.$$

$$- \text{Respuesta: } y = 4.$$

Funciones

Relación que asigna un único valor de salida por entrada. Notación: $f(x)$.

Tipos:

- **Función lineal:** $f(x) = mx + b$. Pendiente m , intersección b .
- **Función cuadrática:** $f(x) = ax^2 + bx + c$. Parábola con vértice en $x = -\frac{b}{2a}$. Si $a > 0$, tiene forma de U. Si $a < 0$, tiene forma de $\cap$.
 - **Desplazamientos:** Para $f(x) = a(x + h)^2 + k$ (forma de vértice):
 - * **Parámetro h :** Controla el desplazamiento horizontal. Si $h > 0$, la parábola se desplaza h unidades a la izquierda (hacia $x < 0$). Si $h < 0$, se desplaza $|h|$ unidades a la derecha (hacia $x > 0$).
 - * **Parámetro k :** Controla el desplazamiento vertical. Si $k > 0$, la parábola se eleva k unidades (hacia y positivo). Si $k < 0$, se desciende $|k|$ unidades (hacia y negativo).
 - * **Parámetro a :** Afecta la amplitud y dirección. Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba; si $a < 0$, abre hacia abajo. El valor $|a|$ determina la estrechez ($|a| > 1$) o anchura ($0 < |a| < 1$).
 - **Ejemplo de desplazamiento:** Compara $f(x) = (x + 2)^2 - 3$ con $g(x) = x^2$.

- * $h = 2 > 0 \Rightarrow$ desplazamiento 2 unidades a la izquierda.
- * $k = -3 < 0 \Rightarrow$ desplazamiento 3 unidades hacia abajo.
- * $a = 1 > 0 \Rightarrow$ abre hacia arriba, misma amplitud que $g(x)$.

- **Función valor absoluto:** $f(x) = |x|$. Forma de V.

Dominio y rango:

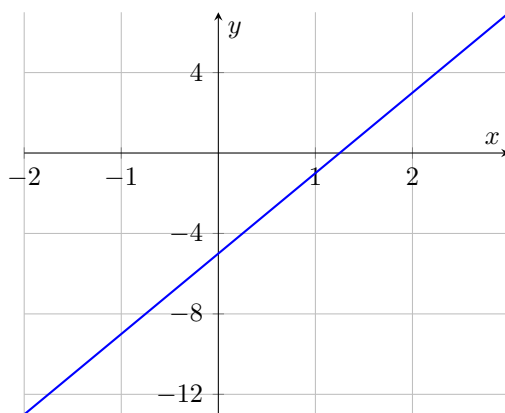
- **Dominio:** Valores de x permitidos.
- **Rango:** Valores de $f(x)$ obtenidos.

Propiedades:

- **Crecimiento/Decrecimiento:** Creciente si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; decreciente si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- **Intersecciones:** Con x (raíces: $f(x) = 0$), con y ($f(0)$).

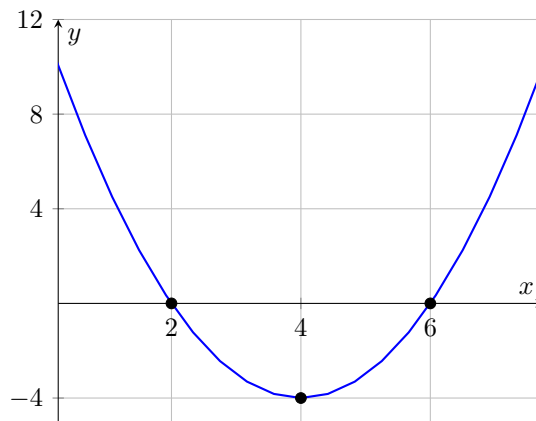
Ejemplo 1: Analiza $f(x) = 4x - 5$.

- **Dominio:** $\mathbb{R}$.
- **Rango:** $\mathbb{R}$.
- **Pendiente:** $m = 4$.
- **Intersección con y :** $b = -5$.
- **Crecimiento:** Creciente ($m > 0$).
- **Gráfico:**



Ejemplo 2: Analiza $f(x) = x^2 - 8x + 12$.

- **Dominio:** $\mathbb{R}$.
- **Vértice:** $x = -\frac{-8}{2 \cdot 1} = 4$, $f(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 12 = -4$. Vértice: $(4, -4)$.
- **Rango:** $[-4, \infty)$.
- **Raíces:** $x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 6$.
- **Gráfico:**



Ejemplo 3: Analiza $f(x) = |x - 3|$.

- **Dominio:** $\mathbb{R}$.
- **Rango:** $[0, \infty)$.
- **Vértice:** $(3, 0)$.
- **Crecimiento/Decrecimiento:** Decreciente en $(-\infty, 3]$, creciente en $[3, \infty)$.
- **Gráfico:**

