

# Resumen Capítulo: Geometría

## Ángulos

Un ángulo es la abertura formada por dos rayos con un vértice común. Se mide en grados ( $^{\circ}$ ).

**Tipos de ángulos:**

- **Agudo:** Menor a  $90^{\circ}$ .
- **Recto:** Igual a  $90^{\circ}$ .
- **Obtuso:** Mayor a  $90^{\circ}$ , menor a  $180^{\circ}$ .
- **Llano:** Igual a  $180^{\circ}$ .

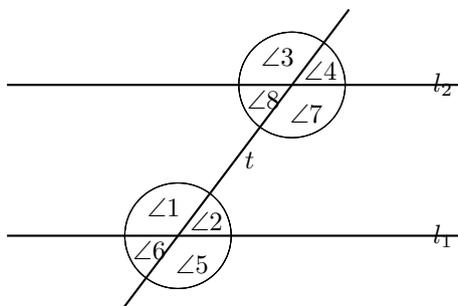
**Relaciones entre ángulos:**

- **Complementarios:** Suman  $90^{\circ}$ . Ejemplo:  $30^{\circ}$  y  $60^{\circ}$ .
- **Suplementarios:** Suman  $180^{\circ}$ . Ejemplo:  $110^{\circ}$  y  $70^{\circ}$ .
- **Opuestos por el vértice:** Iguales. Ejemplo: Si  $\angle A = 50^{\circ}$ , el opuesto también es  $50^{\circ}$ .

**Ángulos en líneas paralelas cortadas por una transversal:**

- **Correspondientes:** Iguales. Ejemplo:  $\angle 1 = \angle 5$ .
- **Alternos internos:** Iguales. Ejemplo:  $\angle 3 = \angle 6$ .
- **Alternos externos:** Iguales. Ejemplo:  $\angle 1 = \angle 8$ .
- **Consecutivos internos:** Suplementarios. Ejemplo:  $\angle 3 + \angle 5 = 180^{\circ}$ .

**Gráfico de ángulos en paralelas:** Líneas paralelas  $l_1$  y  $l_2$  cortadas por la transversal  $t$ , mostrando los ángulos numerados.



**Ejemplo:** En el gráfico, si  $\angle 1 = 70^{\circ}$ , halla  $\angle 3$ ,  $\angle 5$ ,  $\angle 6$ .

- $\angle 1 = \angle 5 = 70^{\circ}$  (opuestos por el vértice).
- $\angle 1 = \angle 3 = 70^{\circ}$  (correspondientes).
- $\angle 6 = 180^{\circ} - \angle 5 = 180^{\circ} - 70^{\circ} = 110^{\circ}$  (consecutivos internos).

## Figuras Geométricas Planas

Polígonos son figuras cerradas con lados rectos.

**Tipos de polígonos:**

- **Triángulo:** 3 lados.
- **Cuadrilátero:** 4 lados.
- **Pentágono:** 5 lados, etc.

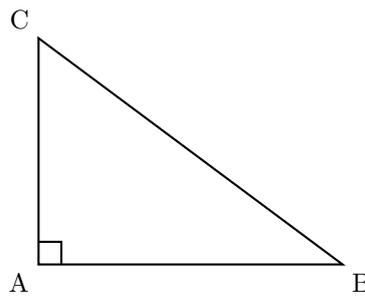
**Triángulos:**

- **Por lados:** Equilátero (3 lados iguales), isósceles (2 lados iguales), escaleno (ningún lado igual).
- **Por ángulos:** Acutángulo (3 ángulos agudos), rectángulo (1 ángulo recto), obtusángulo (1 ángulo obtuso).

**Propiedades:**

- Suma de ángulos internos:  $180^\circ$ .
- Teorema de Pitágoras (en triángulos rectángulos):  $a^2 + b^2 = c^2$ , donde  $c$  es la hipotenusa.

**Gráfico de triángulo rectángulo:**



**Ejemplo:** En un triángulo rectángulo, un cateto mide 3 cm, la hipotenusa 5 cm. Halla el otro cateto.

- $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 3^2 + b^2 = 5^2 \Rightarrow 9 + b^2 = 25 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$ .
- Respuesta: 4 cm.

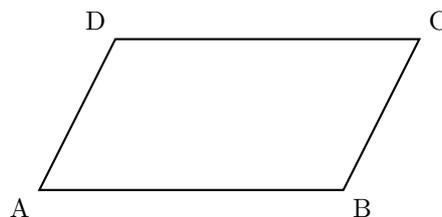
**Cuadriláteros:**

- **Paralelogramo:** Lados opuestos paralelos e iguales.
- **Rectángulo:** 4 ángulos rectos.
- **Rombo:** 4 lados iguales.
- **Cuadrado:** 4 lados iguales, 4 ángulos rectos.
- **Trapeccio:** 1 par de lados paralelos.

**Propiedades:**

- Suma de ángulos internos:  $360^\circ$ .
- Área del rectángulo:  $A = \text{base} \times \text{altura}$ .
- Área del triángulo:  $A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$ .

**Gráfico de paralelogramo:**



**Círculos y arcos:** Un círculo es el conjunto de puntos equidistantes de un punto fijo (centro). Un arco es una porción de la circunferencia.

**Elementos:**

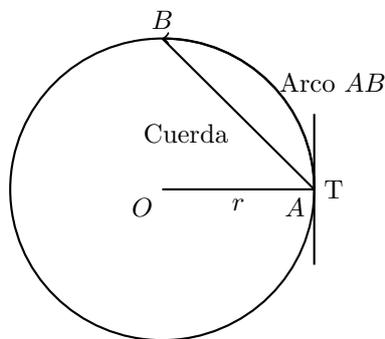
- **Radio:** Segmento del centro a un punto de la circunferencia.
- **Cuerda:** Segmento que une dos puntos de la circunferencia.

- **Diámetro:** Cuerda que pasa por el centro (dos veces el radio).
- **Arco:** Parte de la circunferencia entre dos puntos.
- **Tangente:** Línea que toca el círculo en un solo punto.
- **Sector:** Región delimitada por dos radios y un arco.
- **Secante:** Línea que corta el círculo en dos puntos.

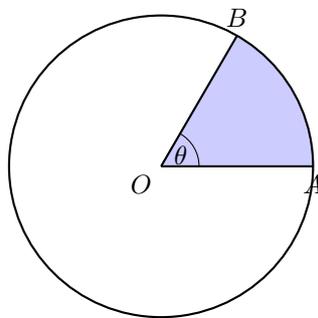
**Fórmulas:**

- **Perímetro:**  $P = 2\pi r$ .
- **Área:**  $A = \pi r^2$ .
- **Longitud de arco:**  $L = \frac{\theta}{360} \cdot 2\pi r$ , donde  $\theta$  es el ángulo central en grados.
- **Área de sector:**  $A_{\text{sector}} = \frac{\theta}{360} \cdot \pi r^2$ .

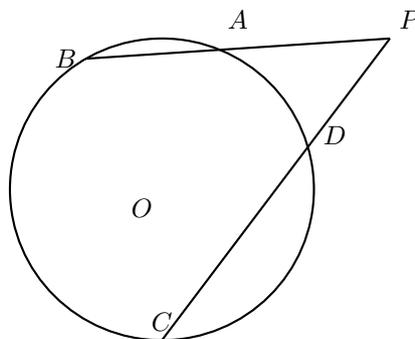
**Gráfico de círculo:** Círculo con centro  $O$ , radio  $r$ , cuerda  $AB$ , arco  $AB$ , y tangente en  $T$ .



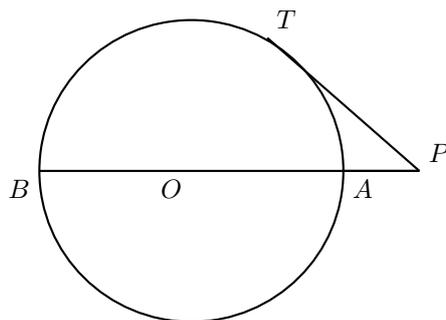
**Gráfico de sector:** Sector circular con ángulo central  $\theta$ .



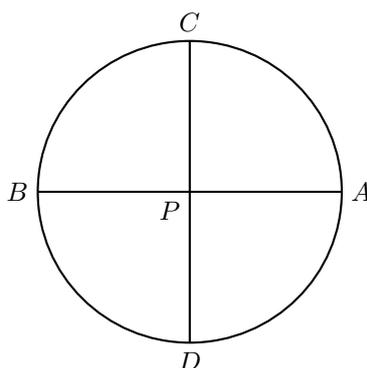
**Teorema de las secantes:** Si dos secantes se intersectan en un punto  $P$  fuera del círculo, el producto de los segmentos de una secante es igual al de la otra:  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ .



**Teorema de la secante-tangente:** Si una secante y una tangente se intersectan en un punto  $P$  fuera del círculo, el cuadrado de la longitud del segmento de la tangente es igual al producto de los segmentos de la secante:  $PT^2 = PA \cdot PB$ .



**Teorema de las cuerdas:** Si dos cuerdas  $AB$  y  $CD$  se intersectan en un punto  $P$  dentro del círculo, el producto de los segmentos de una cuerda es igual al de la otra:  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ .



**Ejemplo 1:** Un círculo tiene radio 6 cm. Calcula su perímetro y área.

- $C = 2\pi \cdot 6 = 12\pi \approx 37,70, \text{cm}$ .
- $A = \pi \cdot 6^2 = 36\pi \approx 113,10, \text{cm}^2$ .

**Ejemplo 2:** Un sector tiene radio 5 cm y ángulo central  $72^\circ$ . Halla la longitud del arco y el área del sector.

- $L = \frac{72}{360} \cdot 2\pi \cdot 5 = \frac{1}{5} \cdot 10\pi = 2\pi \approx 6,28, \text{cm}$ .
- $A_{\text{sector}} = \frac{72}{360} \cdot \pi \cdot 5^2 = \frac{1}{5} \cdot 25\pi = 5\pi \approx 15,71, \text{cm}^2$ .

**Ejemplo 3 (Teorema de las secantes):** En un círculo, dos secantes se cruzan en  $P$  fuera del círculo. Si  $PA = 4$  cm,  $PB = 6$  cm,  $PC = 3$  cm, halla  $PD$ .

- Por el teorema:  $PA \cdot PB = PC \cdot PD \Rightarrow 4 \cdot 6 = 3 \cdot PD \Rightarrow 24 = 3 \cdot PD \Rightarrow PD = 8$  cm.

**Ejemplo 4 (Teorema de la secante-tangente):** Una tangente en  $T$  y una secante se cruzan en  $P$ . Si  $PT = 5$  cm,  $PA = 4$  cm, halla  $PB$ .

- Por el teorema:  $PT^2 = PA \cdot PB \Rightarrow 5^2 = 4 \cdot PB \Rightarrow 25 = 4 \cdot PB \Rightarrow PB = 6,25$  cm.

## Cuerpos Geométricos

Figuras tridimensionales con volumen.

**Tipos:**

- **Prismas:** Dos bases paralelas congruentes, caras laterales paralelogramos.
- **Pirámides:** Una base, vértice opuesto.
- **Cilindros:** Dos bases circulares paralelas.
- **Conos:** Una base circular, un vértice.
- **Esferas:** Todos los puntos equidistantes del centro.

## Fórmulas:

### • Figuras planas:

#### – Triángulo:

- \* Perímetro:  $P = a + b + c$ , donde  $a, b, c$  son los lados.
- \* Área:  $A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$ .

#### – Rectángulo:

- \* Perímetro:  $P = 2(\text{largo} + \text{ancho})$ .
- \* Área:  $A = \text{largo} \times \text{ancho}$ .

#### – Cuadrado:

- \* Perímetro:  $P = 4 \cdot \text{lado}$ .
- \* Área:  $A = \text{lado}^2$ .

#### – Círculo:

- \* Perímetro:  $P = 2\pi r$ .
- \* Área:  $A = \pi r^2$ .

### • Cuerpos geométricos:

#### – Prisma:

- \* Área:  $A = \text{suma áreas basales y laterales}$ .
- \* Volumen:  $V = \text{área base} \times \text{altura}$ .

#### – Pirámide:

- \* Área:  $A = \text{suma áreas basales y laterales}$ .
- \* Volumen:  $V = \frac{1}{3} \times \text{área base} \times \text{altura}$ .

#### – Cilindro:

- \* Área:  $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ .
- \* Volumen:  $V = \pi r^2 h$ .

#### – Cono:

- \* Área:  $A = \pi r g + \pi r^2$ .
- \* Volumen:  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ .

#### – Esfera:

- \* Área:  $A = 4\pi r^2$ .
- \* Volumen:  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ .

**Ejemplo:** Un cono tiene radio 4 cm, altura 3 cm. Calcula su volumen.

- $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (4)^2 (3) = \frac{1}{3} \pi \cdot 16 \cdot 3 = 16\pi \approx 50,27, \text{cm}^3$ .

## Transformaciones Isométricas

Transformaciones que preservan distancias y ángulos.

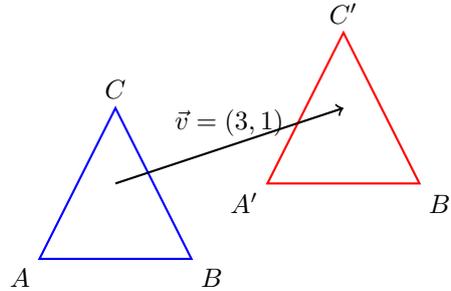
**Vectores:** Un vector  $\vec{v} = (a, b)$  tiene:

- **Módulo:**  $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .
- **Dirección:** Ángulo  $\theta$  con el eje horizontal, dado por  $\tan^{-1} \left( \frac{b}{a} \right)$ .
- **Sentido:** Orientación positiva (hacia derecha/arriba) o negativa (hacia izquierda/abajo) según los signos de  $a$  y  $b$ .
- **Distancia entre dos puntos:** Para puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , la distancia es  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .
- **Punto medio:** Para puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , el punto medio es  $\left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ .

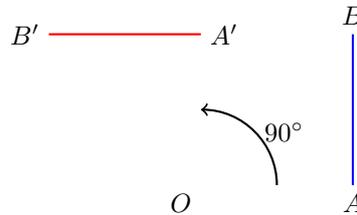
**Tipos:**

- **Traslación:** Desplaza sin rotar ni cambiar tamaño. Vector  $\vec{v} = (a, b)$ .
- **Rotación:** Gira alrededor de un punto (centro) por un ángulo. Ejemplo: Rotación de  $90^\circ$  antihoraria.
- **Reflexión:** Refleja sobre una línea (eje de simetría).
- **Simetría central:** Refleja respecto a un punto central.

**Gráfico de traslación:**



**Gráfico de rotación:**



**Ejemplo 1 (Distancia y punto medio):** Dados los puntos  $A(1, 2)$  y  $B(4, 6)$ , calcula la distancia entre ellos y su punto medio.

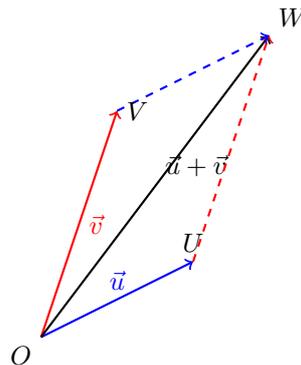
- Distancia:  $d = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ .
- Punto medio:  $(\frac{1+4}{2}, \frac{2+6}{2}) = (\frac{5}{2}, 4) = (2.5, 4)$ .

**Ejemplo 2 (Traslación):** Un triángulo con vértices  $A(1, 1)$ ,  $B(3, 1)$ ,  $C(2, 3)$  se traslada con  $\vec{v} = (2, 1)$ . Halla los nuevos vértices.

- $A'(1 + 2, 1 + 1) = (3, 2)$ .
- $B'(3 + 2, 1 + 1) = (5, 2)$ .
- $C'(2 + 2, 3 + 1) = (4, 4)$ .
- Respuesta:  $A'(3, 2)$ ,  $B'(5, 2)$ ,  $C'(4, 4)$ .

**Ejemplo 3 (Suma de vectores):** Dados los vectores  $\vec{u} = (2, 1)$  y  $\vec{v} = (1, 3)$ , calcula  $\vec{u} + \vec{v}$  y represéntalo gráficamente.

- Suma:  $\vec{u} + \vec{v} = (2 + 1, 1 + 3) = (3, 4)$ .



**Ejemplo 4 (Resta de vectores):** Dados los vectores  $\vec{u} = (2, 1)$  y  $\vec{v} = (1, 3)$ , calcula  $\vec{u} - \vec{v}$  y represéntalo gráficamente.

- Resta:  $\vec{u} - \vec{v} = (3 - 2, 2 - 3) = (1, -1)$ .

